163) **(М.В. Кузнецова)** Введём выражение $M \,\&\, K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$((X \,\&\, 13 \neq 0) \wedge (X \,\&\, 39 \neq 0)) \;\rightarrow\; ((X \,\&\, A \neq 0) \wedge (X \,\&\, 13 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Решение:

1) Упростим внешний вид записи выражения:

$$((X \,\&\, 13 \neq 0) \wedge (X \,\&\, 39 \neq 0)) \;\rightarrow\; ((X \,\&\, A \neq 0) \wedge (X \,\&\, 13 \neq 0)) = 1$$

Введем обозначения:

$A = (X \,\&\, A = 0)$, $P = (X \,\&\, 13 = 0)$, $Q = (X \,\&\, 39 = 0)$

Получим, $(\bar{P} \cdot \bar{Q}) \rightarrow (\bar{A} \cdot \bar{P}) = 1$

2) Упростим логическое выражение, избавляясь от отрицаний:

$\overline{(\bar{P} \cdot \bar{Q})} + (\bar{A} \cdot \bar{P}) = 1$

$(P + Q) + (\bar{A} \cdot \bar{P}) = 1$ (по закону дистрибутивности)

$\mathrm{Q} + (P + \bar{A}) \cdot (P + \bar{P}) = 1$

$\mathrm{Q} + P + \bar{A} = 1$

$\mathrm{A} \rightarrow (\mathrm{Q} + \mathrm{P}) = 1$ (1)

3) Выражение (1) означает, что набор A должен соответствовать либо Q, либо P, либо обоим вместе, но так как ищем минимальное, выбираем наименьшее из значений:

$$\mathrm{A} \rightarrow (13 + 39) = 1$$

4) Итак, A=13.

Ответ: 13