Демоверсия ЕГЭ 2018

18 Для какого наибольшего целого числа A формула

$$((x \le 9) \to (x \cdot x \le A)) \wedge ((y \cdot y \le A) \to (y \le 9))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y?

Ответ: ___________________________.

Решение:

1) Найдем, для какого наибольшего целого числа А формула истинна.

$$((x \le 9) \to (x \cdot x \le A)) \wedge ((y \cdot y \le A) \to (y \le 9)) = 1$$

2) Упростим внешний вид записи:

$$((x \le 9) \to (x^2 \le A)) \wedge ((y^2 \le A) \to (y \le 9)) = 1$$

Рассмотрим выражение: конъюнкция двух выражений, левое зависит от x, правое – от y.

Конъюнкция истинна, когда оба высказывания истинны. Значит, оба выражения должны быть истинными для истинности всего выражения:

$$((x \le 9) \to (x^2 \le A)) = 1 \quad \text{и} \quad ((y^2 \le A) \to (y \le 9)) = 1$$

3) Рассмотрим отдельно друг от друга два независимых выражения.

$$((x \le 9) \to (x^2 \le A)) = 1$$

Импликация истинна всегда, за исключением случая, когда $\mathbf{1 \to 0 = 0}$

Поэтому, этого случая допустить нельзя.

Если левое выражение истинно $(x \le 9)$, значит и правое будет истинным $(x^2 \le A)$.

Т.к. x – неотрицательное, получим: $\mathbf{0 \le x \le 9}$. Для поиска максимального значения А возьмём максимальное значение x, т.е. $\boldsymbol{x = 9}$.

Подставим $\boldsymbol{x = 9}$ в правую часть выражения: $\mathbf{9^2 \le A}$

$81 \le A$, т.е. $A \ge 81$, значит минимальное $\mathrm{A} = \mathbf{81}$.

4) Рассмотрим правую часть выражения:

$$((y^2 \le A) \to (y \le 9)) = 1$$

Для того, чтобы найти максимальное значение A, оттолкнёмся от варианта: $\mathbf{1 \to 0 = 0.}$

Но его допустить нельзя для истинности всего выражения, поэтому рассмотрим допустимый случай:

$$\mathbf{0 \to 0 = 1.}$$

Преобразуем выражение, сделаем обе части выражения ложными, т.е. инвертируем:

$$\big((y^2 > A) \to (y > 9)\big) = 1$$

0 0

Итак, $\boldsymbol{y} = \mathbf{10}$, $\quad 10^2 > A$, $\quad \mathbf{100} > \boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A} < \mathbf{100}$. Итак, максимальное $\boldsymbol{A} = \mathbf{99}$.

Ответ: 99.

Краткая запись решения: ***Делай так!***

$$((x \le 9) \to (x^2 \le A)) \wedge ((y^2 \le A) \to (y \le 9)) = 1$$

Конъюнкция истинна, когда оба высказывания истинны.

$((x \le 9) \to (x^2 \le A)) = 1$ и $((y^2 \le A) \to (y \le 9)) = 1$

Нельзя допустить: $\mathbf{1} \to \mathbf{0} = \mathbf{0}.$

1) Рассмотрим случай: $\mathbf{1} \to \mathbf{1} = \mathbf{1}.$

$((x \le 9) \to (x^2 \le A)) = 1$

$(x \le 9) = 1$ $\qquad (x^2 \le A) = 1$

$\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \mathbf{9}$ $\qquad 9^2 \le A$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{9}$ $\qquad 81 \le A$, т.е. $A \ge 81$, значит минимальное $\text{A} = \mathbf{81}.$

2) Найдем максимальное A.

$$((y^2 \le A) \to (y \le 9)) = 1$$

оттолкнёмся от варианта: $\mathbf{1} \to \mathbf{0} = \mathbf{0}.$

Но его допустить нельзя для истинности всего выражения, поэтому рассмотрим допустимый случай:

$\mathbf{0} \to \mathbf{0} = \mathbf{1}.$

$\big((y^2 > A) \to (y > 9)\big) = 1$

0 0

$\boldsymbol{y} = \mathbf{10}$

$10^2 > A$

$\mathbf{100} > \boldsymbol{A}$

т. е. $\boldsymbol{A} < \mathbf{100}$. Итак, максимальное $\boldsymbol{A} = \mathbf{99}$.

Ответ: 99.

информатика23.рф